Грабцевич В. И. http://www.afportal.ru/

9 класс.

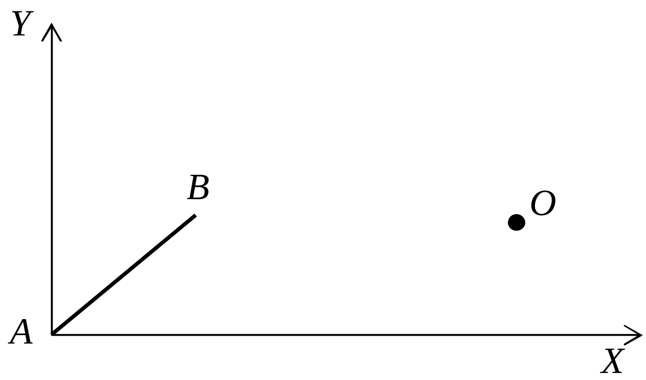
Условия задач.

Задача 1. «Рельсы, рельсы, шпалы, шпалы …»

Пассажир стоял у начала вагона с порядковым номером k. Поезд тронулся с места, после чего оказалось, что вагон с номером m двигался мимо пассажира t с. Какое время займет прохождение мимо этого пассажира вагона с номером n? Движение поезда равноускоренное, длины вагонов одинаковы, пассажир неподвижен относительно платформы.

Задача 2. «Циркуль и линейка».

Тело бросили из точки A под углом к горизонту. Направление начальной скорости тела совпадало с направлением отрезка AB на (рис.). Через время t после броска тело оказалось в точке O. С помощью циркуля и линейки без делений определите положение O_1 камня в момент времени $t/2$. Обоснуйте выбор своего решения.



Задача 3. «Ядерная физика».

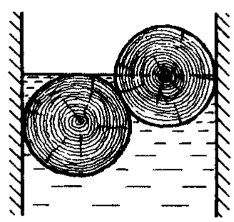
Частица с массой m налетает на атомное ядро с массой M. После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Постройте график зависимости величины n от отношения масс частиц $k=m/M$. При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?

Задача. «Просто жук какой-то»

Диск радиусом R = 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой n = 25 об/мин. От центра диска к его краю вдоль радиуса ползет жук с постоянной скоростью v = 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения $\mu_{\min}$ жука о поверхность он сумеет добраться до края диска?

Задача 5. «Застрявшие бревна».

Определите силу давления бревен массы m на стенки канала. Верхнее бревно погружено в воду наполовину, а нижнее касается верхним участком поверхности воды. Бревна одинаковы.



Решение 1.

Обозначим время, за которое мимо наблюдателя прошли все вагоны с номера κ по номер $m - 1$ включительно, через $t_{m\text{-}1}$, по номер m через t_m, по номер $(n - 1)$ через $t_{\text{n-1}}$, по номер n через t_n; время прохождения самих вагонов с номерами κ, m и n через Δt_{k}, Δt_m, Δt_{n} соответственно. Тогда справедливо, что

$$\Delta t_{\text{m}} = t_m - t_{m\text{-}1},\ \Delta t_{\text{n}} = t_n - t_{n\text{-}1}, \qquad (1)$$

Если длина вагона равна l, а ускорение поезда a, то для вагона κ

$$l = a(\Delta t_{\text{k}})^2/2. \qquad (2)$$

Из последнего соотношения $(2l/\text{a})^{1/2} = \Delta t_{\text{k}}$.

За время t_m мимо пассажира прошло $m - (\kappa - 1)$ вагонов, поэтому соотношение типа соотношения (2) запишется в этом случае в виде $(m + 1 - \kappa)\ l = at_m{}^2/2$, откуда $t_m = (2l/a)^{1/2}\ (m + 1 - k)^{1/2} = \Delta t_k\ (m + 1 - k)^{1/2}$. Аналогично $t_{m\text{-}1} = \Delta t_{\text{k}}\ (m - k)^{1/2}$. С учетом равенства (1) получаем, что

$$\Delta t_k = (t_m - t_{m\text{-}1})/[(m + 1 - k)^{1/2}) - (m - k)^{1/2}] = t/[(m + 1 - \text{k})^{1/2}) - (m - \text{k})^{1/2}]$$

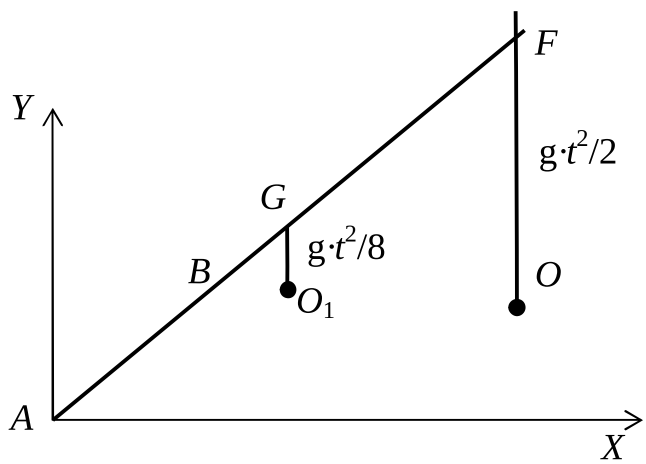
Проводя те же выкладки для вагона с порядковым номером n, найдем, что искомое время определяется выражением

$\Delta t_n = [(n + 1 - k)^{1/2}) - (n - k)^{1/2}]\ \Delta t_{\text{k}} = [(n + 1 - \text{k})^{1/2}) - (n - \text{k})^{1/2}]\ t/[(m + 1 - k)^{1/2}) - (m - k)^{1/2}]$.

Так как по условиям задачи $m, n \geq \kappa$, то все корни имеют смысл, знаменатель в ноль не обращается.

Решение 2.

Положение точки O определяется суммой перемещений вдоль отрезка AB на расстояние $v_{\text{o}}\cdot t$ и перемещением вертикально вниз под действием силы тяжести на расстояние $\text{g}\cdot t^2/2$ (рис.). Соответственно, в момент времени $t/2$ положение тела будет определяться суммой перемещений вдоль отрезка AB на расстояние $v_{\text{o}}\cdot t/2$ и перемещением вертикально вниз под действием силы тяжести на расстояние $g\cdot t^2/8$.



Таким образом, последовательность построения точки O_1 должна быть следующей:

1. Проводим через точку O прямую, CD перпендикулярную оси X.
2. Продолжаем отрезок AB до пересечения с прямой CD и фиксируем точку пересечения F.
3. Делим отрезок AF пополам (находим точку G – середину отрезка AF).
4. Через точку G опускаем перпендикуляр на ось X.
5. Находим середину отрезка OF, а затем половину отрезка OF еще раз делим пополам, определяя таким образом длину четвертой части отрезка OF.
6. Откладываем четвертую часть отрезка OF от точки G вертикально вниз. Полученная точка и будет искомой точкой O_1.

Решение 3.

Обозначим скорость налетающей частицы массы m через v. Происходит упругий удар с ядром массы M. Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорость ядра V после удара:

$$V = \frac{3mv}{m+M}.$$

По условию кинетическая энергия ядра после удара составляет n-ую часть кинетической энергии налетавшей частицы. Поэтому

$$n = \frac{MV^2}{mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{k}{(1+k)^2},$$

где $k = m/M$ – отношение масс частицы и ядра. Полученная функция $n = n(k)$ при малых k ведет себя как $n(k) \approx k$.

Таким образом, доля переданной энергии растет с ростом относительной массы налетающей частицы. В тоже время, при больших k имеем оценку

$$n(k) \approx \frac{1}{k}.$$

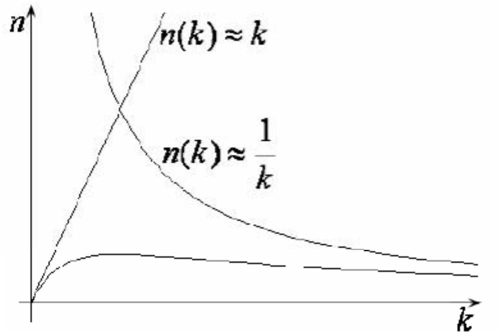
В этом случае доля переданной энергии падает – очень тяжелая налетающая частица почти не передает энергии легкому ядру. Из установленных асимптотик вытекает, что зависимость $n = n(k)$ должна иметь максимум. Его можно найти, дифференцируя $n(k)$ и приравнивая производную нулю:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{1-k^2}{(1+k)^4} = 0.$$

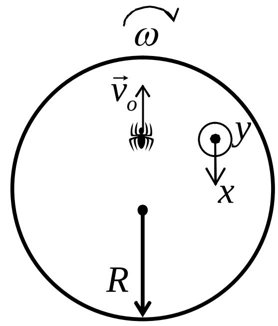
Отсюда находим, что $k = 1$. Таким образом, доля переданной энергии максимальна, когда массы частицы и ядра равны. При этом передается четвертая часть энергии налетающей частицы, поскольку при $k = 1$:

$$n = \frac{k}{(1+k)^2} = \frac{1}{4}.$$

График функции $n(k)$ и найденные асимптотики показаны на рисунке.



Решение 4.



Рассмотрим движение жука по вращающемуся диску. Его линейная скорость $v = \omega R$ при таком движении, будет постоянно меняться, причем $R = v_o \Delta t$, что, вполне логично. Тогда $\Delta v = \omega v_o \Delta t$, где Δv – приращение скорости за Δt.

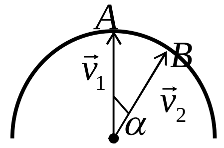
$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega v_o .$$

Следует отметить, что линейная скорость будет изменяться и по модулю и по направлению, а a_1 будет входить в состав a_τ, которым обладает жук.

Собственная же скорость жука v_o будет изменяться только по направлению. Наглядно Δv_o можно представить на рисунке $\Delta \vec{v}_o = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Фактически вектор поворачивается на α, причем $\alpha = \omega \Delta t$. А вот Δv_o представим как длину дуги AB:

$$\Delta v_o = v_o \cdot \alpha = \omega v_o \Delta t, \; a_2 = \frac{\Delta v_o}{\Delta t} = \omega v_o .$$

Общее тангенциальное ускорение жука $a_\tau = a_1 + a_2 = 2\omega v_o$.



Естественно, у жука будет и центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$. Суммарное ускорение жука $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N},$$

в проекции $ma = F_{тр}$, $N = mg$.

Крайний случай: жук на границе диска.

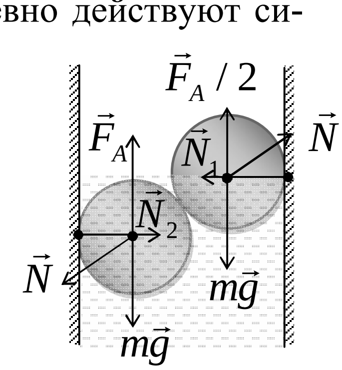
По закону Кулона – Амонтона $F_{тр} = \mu N = \mu mg$, $a = \mu g$, $\mu = \dfrac{a}{g}$. Это и есть искомое $\mu_{\min}$.

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}{g} = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 + 4\omega^2 v_o^2}}{g} = \frac{\omega}{g}\sqrt{\omega^2 R^2 + 4 v_o^2} = \frac{4\pi\nu}{g}\sqrt{\pi^2 \nu^2 R^2 + v_o^2} .$$

После вычислений, находим $\mu_{\min} = 0{,}15$.

Решение 5.

Расставим силы, действующие на бревна. На верхнее бревно действуют силы: тяжести, сила Архимеда в половине погруженного объема, сила реакции при взаимодействии с нижним бревном, реакции опоры стенки. На нижнее бревно действуют силы: тяжести, Архимеда – в объеме погруженного тела, реакция опоры при взаимодействии с верхним бревном, реакция опоры левой стенки.



В качестве точки вращения выберем точку соединения бревен. Правило моментов для верхнего бревна

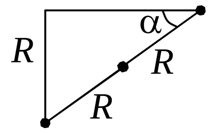
$$N_1 R\sin\alpha + \frac{F_A}{2} R\cos\alpha = mgR\cos\alpha\text{, (1)}$$

для нижнего бруска

$$N_2 R\sin\alpha + mgR\cos\alpha = F_A R\cos\alpha\text{ . (2)}$$

Из (1) уравнения $N_1 = mgctg\alpha - \frac{F_A}{2}ctg\alpha$, а из (2) – $N_2 = F_A ctg\alpha - mgctg\alpha$.

Упростим уравнения заменив



$$ctg\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{2R}{R}\sqrt{1-(R/2R)^2} = \frac{2\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

$$N_1 = mg\sqrt{3} - \frac{F_A}{2}\sqrt{3} \text{ и } N_2 = F_A\sqrt{3} - mg\sqrt{3}\text{ . (3)}$$

Для определения искомых силы давления бревен на стенки канала запишем равенство сил: $\frac{F_A}{2} + N\sin\alpha = mg$ – для первого бревна, $F_A = N\sin\alpha + mg$ – для второго бревна. Решая два последних уравнения, относительно силы Архимеда, находим вначале $N = \frac{F_A}{4\sin\alpha}$, а затем $F_A = \frac{4}{3}mg$.

Подставляя в (3)

$$N_1 = mg\sqrt{3} - \frac{4mg}{2\times 3}\sqrt{3} = \frac{mg\sqrt{3}}{3} \text{ и } N_2 = \frac{4}{3}mg\sqrt{3} - mg\sqrt{3} = \frac{mg\sqrt{3}}{3}\,.$$

Оказывается, что бревна с одинаковой силой действуют на стенки канала. Она равна $N_1 = N_2 = \frac{mg\sqrt{3}}{3} = 5{,}66m$.