

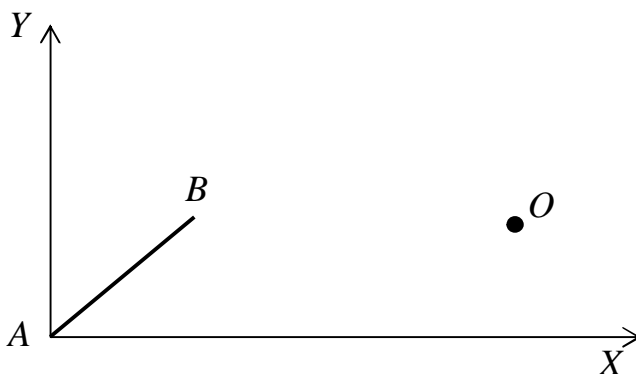
Условия задач.

Задача 1. «Рельсы, рельсы, шпалы, шпалы ...»

Пассажир стоял у начала вагона с порядковым номером k . Поезд тронулся с места, после чего оказалось, что вагон с номером m двигался мимо пассажира t с. Какое время займет прохождение мимо этого пассажира вагона с номером n ? Движение поезда равноускоренное, длины вагонов одинаковы, пассажир неподвижен относительно платформы.

Задача 2. «Циркуль и линейка».

Тело бросили из точки A под углом к горизонту. Направление начальной скорости тела совпадало с направлением отрезка AB на (рис.). Через время t после броска тело оказалось в точке O . С помощью циркуля и линейки без делений определите положение O_1 камня в момент времени $t/2$. Обоснуйте выбор своего решения.



Задача 3. «Ядерная физика».

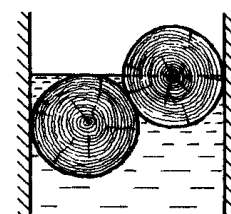
Частица с массой m налетает на атомное ядро с массой M . После упругого удара ядро приобрело кинетическую энергию, составляющую n -ую часть кинетической энергии налетающей частицы. Постройте график зависимости величины n от отношения масс частиц $k=m/M$. При каком отношении масс доля переданной энергии максимальна?

Задача. «Просто жук какой-то»

Диск радиусом $R = 20$ см равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой $n = 25$ об/мин. От центра диска к его краю вдоль радиуса ползет жук с постоянной скоростью $v = 10$ см/с. При каком минимальном коэффициенте трения μ_{\min} жука о поверхность он сумеет добраться до края диска?

Задача 5. «Застрявшие бревна».

Определите силу давления бревен массы m на стенки канала. Верхнее бревно погружено в воду наполовину, а нижнее касается верхним участком поверхности воды. Бревна одинаковы.



Решение 1.

Обозначим время, за которое мимо наблюдателя прошли все вагоны с номера k по номер $m - 1$ включительно, через t_{m-1} , по номер m через t_m , по номер $(n - 1)$ через t_{n-1} , по номер n через t_n ; время прохождения самих вагонов с номерами k , m и n через Δt_k , Δt_m , Δt_n соответственно. Тогда справедливо, что

$$\Delta t_m = t_m - t_{m-1}, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}, \quad (1)$$

Если длина вагона равна l , а ускорение поезда a , то для вагона k

$$l = a(\Delta t_k)^2/2. \quad (2)$$

Из последнего соотношения $(2l/a)^{1/2} = \Delta t_k$.

За время t_m мимо пассажира прошло $m - (k - 1)$ вагонов, поэтому соотношение типа соотношения (2) запишется в этом случае в виде $(m + 1 - k)l = at_m^2/2$, откуда $t_m = (2l/a)^{1/2} (m + 1 - k)^{1/2} = \Delta t_k (m + 1 - k)^{1/2}$. Аналогично $t_{m-1} = \Delta t_k (m - k)^{1/2}$. С учетом равенства (1) получаем, что

$$\Delta t_k = (t_m - t_{m-1})/[(m + 1 - k)^{1/2} - (m - k)^{1/2}] = t/[(m + 1 - k)^{1/2} - (m - k)^{1/2}]$$

Проводя те же выкладки для вагона с порядковым номером n , найдем, что искомое время определяется выражением

$$\Delta t_n = [(n + 1 - k)^{1/2} - (n - k)^{1/2}] \Delta t_k = [(n + 1 - k)^{1/2} - (n - k)^{1/2}] t/[(m + 1 - k)^{1/2} - (m - k)^{1/2}].$$

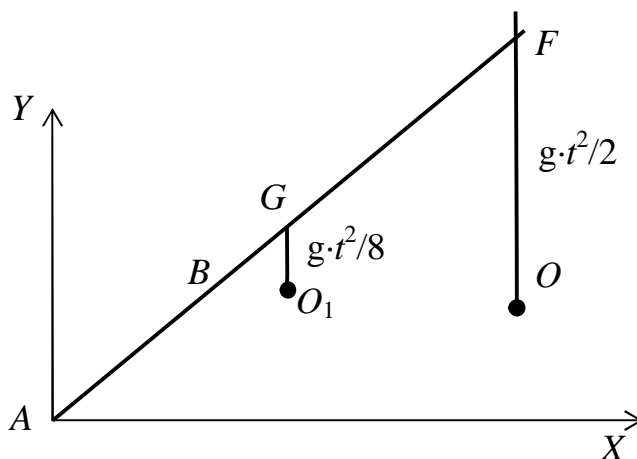
Так как по условиям задачи $m, n \geq k$, то все корни имеют смысл, знаменатель в ноль не обращается.

Решение 2.

Положение точки O определяется суммой перемещений вдоль отрезка AB на расстояние $v_0 \cdot t$ и перемещением вертикально вниз под действием силы тяжести на расстояние $g \cdot t^2/2$ (рис.). Соответственно, в момент времени $t/2$ положение тела будет определяться суммой перемещений вдоль отрезка AB на расстояние $v_0 \cdot t/2$ и перемещением вертикально вниз под действием силы тяжести на расстояние $g \cdot t^2/8$.

Таким образом, последовательность построения точки O_1 должна быть следующей:

1. Проводим через точку O прямую, CD перпендикулярную оси X .
2. Продолжаем отрезок AB до пересечения с прямой CD и фиксируем точку пересечения F .
3. Делим отрезок AF пополам (находим точку G – середину отрезка AF).
4. Через точку G опускаем перпендикуляр на ось X .
5. Находим середину отрезка OF , а затем половину отрезка OF еще раз делим пополам, определяя таким образом длину четвертой части отрезка OF .
6. Откладываем четвертую часть отрезка OF от точки G вертикально вниз. Полученная точка и будет искомой точкой O_1 .



Решение 3.

Обозначим скорость налетающей частицы массы m через v . Происходит упругий удар с ядром массы M . Используя известные результаты анализа задачи об упругом ударе двух тел, находим скорость ядра V после удара:

$$V = \frac{3mv}{m + M}.$$

По условию кинетическая энергия ядра после удара составляет n -ую часть кинетической энергии налетающей частицы. Поэтому

$$n = \frac{MV^2}{mv^2} = \frac{4mM}{(m + M)^2} = \frac{k}{(1 + k)^2},$$

где $k = m/M$ – отношение масс частицы и ядра. Полученная функция $n = n(k)$ при малых k ведет себя как $n(k) \approx k$.

Таким образом, доля переданной энергии растет с ростом относительной массы налетающей частицы. В тоже время, при больших k имеем оценку

$$n(k) \approx \frac{1}{k}.$$

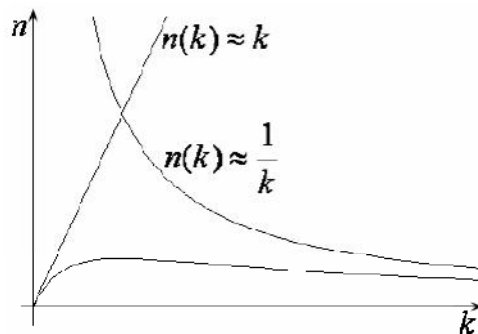
В этом случае доля переданной энергии падает – очень тяжелая налетающая частица почти не передает энергии легкому ядру. Из установленных асимптотик вытекает, что зависимость $n = n(k)$ должна иметь максимум. Его можно найти, дифференцируя $n(k)$ и приравнявая производную нулю:

$$\frac{dn}{dk} = \frac{1 - k^2}{(1 + k)^4} = 0.$$

Отсюда находим, что $k = 1$. Таким образом, доля переданной энергии максимальна, когда массы частицы и ядра равны. При этом передается четвертая часть энергии налетающей частицы, поскольку при $k = 1$:

$$n = \frac{k}{(1 + k)^2} = \frac{1}{4}.$$

График функции $n(k)$ и найденные асимптотики показаны на рисунке.



Решение 4.

Рассмотрим движение жука по вращающемуся диску. Его линейная скорость $v = \omega R$ при таком движении, будет постоянно меняться, причем $R = v_0 \Delta t$, что, вполне логично. Тогда $\Delta v = \omega v_0 \Delta t$, где Δv – приращение скорости за Δt .

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega v_0.$$

Следует отметить, что линейная скорость будет изменяться и по модулю и по направлению, а a_1 будет входить в состав a_τ , которым обладает жук.

Собственная же скорость жука v_0 будет изменяться только по направлению. Наглядно Δv_0 можно представить на рисунке $\Delta \vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Фактически вектор поворачивается на α , причем $\alpha = \omega \Delta t$. А вот Δv_0 представим как длину дуги AB :

$$\Delta v_0 = v_0 \cdot \alpha = \omega v_0 \Delta t, \quad a_2 = \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \omega v_0.$$

Общее тангенциальное ускорение жука $a_\tau = a_1 + a_2 = 2\omega v_0$.

Естественно, у жука будет и центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$. Суммарное ускорение жука $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{mp} + m\vec{g} + \vec{N},$$

в проекции $ma = F_{mp}$, $N = mg$.

Крайний случай: жук на границе диска.

По закону Кулона – Амонтона $F_{mp} = \mu N = \mu mg$, $a = \mu g$, $\mu = \frac{a}{g}$. Это и есть

искомое μ_{\min} .

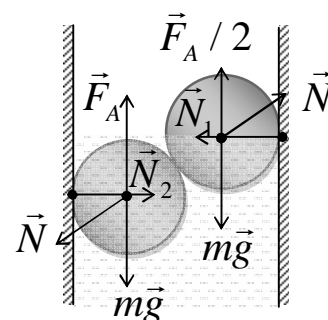
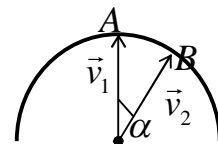
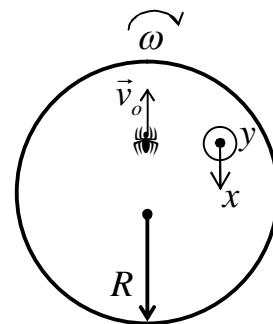
$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}{g} = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 + 4\omega^2 v_0^2}}{g} = \frac{\omega}{g} \sqrt{\omega^2 R^2 + 4v_0^2} = \frac{4\pi v}{g} \sqrt{\pi^2 v^2 R^2 + v_0^2}.$$

После вычислений, находим $\mu_{\min} = 0,15$.

Решение 5.

Расставим силы, действующие на бревна. На верхнее бревно действуют силы: тяжести, сила Архимеда в половине погруженного объема, сила реакции при взаимодействии с нижним бревном, реакции опоры стенки. На нижнее бревно действуют силы: тяжести, Архимеда – в объеме погруженного тела, реакция опоры при взаимодействии с верхним бревном, реакция опоры левой стенки.

В качестве точки вращения выберем точку соединения бревен. Правило моментов для верхнего бревна



$$N_1 R \sin \alpha + \frac{F_A}{2} R \cos \alpha = mgR \cos \alpha, \quad (1)$$

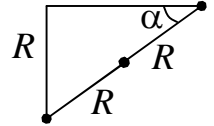
для нижнего бруска

$$N_2 R \sin \alpha + mgR \cos \alpha = F_A R \cos \alpha. \quad (2)$$

Из (1) уравнения $N_1 = mg \operatorname{ctg} \alpha - \frac{F_A}{2} \operatorname{ctg} \alpha$, а из (2) – $N_2 = F_A \operatorname{ctg} \alpha - mg \operatorname{ctg} \alpha$.

Упростим уравнения заменив

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{2R}{R} \sqrt{1 - (R/2R)^2} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



$$N_1 = mg\sqrt{3} - \frac{F_A}{2}\sqrt{3} \text{ и } N_2 = F_A\sqrt{3} - mg\sqrt{3}. \quad (3)$$

Для определения искомого силы давления бревен на стенки канала запишем равенство сил: $\frac{F_A}{2} + N \sin \alpha = mg$ – для первого бревна, $F_A = N \sin \alpha + mg$ – для второго бревна. Решая два последних уравнения, относительно силы Архимеда, находим вначале $N = \frac{F_A}{4 \sin \alpha}$, а затем $F_A = \frac{4}{3} mg$.

Подставляя в (3)

$$N_1 = mg\sqrt{3} - \frac{4mg}{2 \times 3} \sqrt{3} = \frac{mg\sqrt{3}}{3} \text{ и } N_2 = \frac{4}{3} mg\sqrt{3} - mg\sqrt{3} = \frac{mg\sqrt{3}}{3}.$$

Оказывается, что бревна с одинаковой силой действуют на стенки канала.

Она равна $N_1 = N_2 = \frac{mg\sqrt{3}}{3} = 5,66m$.