7 класс.

Условия задач.

Задача 1. «Плотность».

В стеклянный стакан кубической формы наливают воду. После взвешивания на весах определили общую массу M = 350 г. Штангенциркулем определили: внутренний диаметр стакана, он оказался равным d = 6,9 см, внешний – D = 7,0 см. Толщина боковых стенок стакана и дна одинакова. Определите плотность стекла, из которого изготовлен стакан. Плотность воды 1 г/см^3.

Задача 2. Встречное движение

Из пункта A в пункт B выехал автомобиль «Волга» со скоростью 80 км/ч. В то же время навстречу ему из пункта B выехал автомобиль «Жигули». В 12 часов дня машины проехали мимо друг друга. В 12:32 «Волга» прибыла в пункт B, а ещё через 18 минут «Жигули» прибыли в A. Вычислите скорость «Жигулей».

Задача 3. «Картошка».

Оцените длину шкурки, которую снимают, почистив килограмм картошки. Считайте, что картофелины имеют форму шара радиуса R = 3 см. Ширину шкурки примите равной 1 см. Во сколько раз изменится длина снятой шкурки, если размер каждой картофелины в n раз меньше? Килограмм какой картошки можно быстрее почистить: крупной или мелкой?

Задача 4. Давление.

Сила давления воды на дно прямоугольного аквариума равна 60 Н. На меньшую из боковых стенок, ширина которой 20 см, вода давит с силой 10 Н. Какова сила давления воды на большую из боковых стенок? Атмосферное давление не учитывайте. Плотность воды 1000 кг/м^3, величина $g \approx 10$ Н/кг.

Задача 5. Сообщающиеся сосуды

В одинаковые сообщающиеся сосуды налита жидкость с плотностью $\rho_т$ так, что ее высота равна H. В один из сосудов начинают очень медленно подливать другую, более легкую жидкость с плотностью $\rho_л$. Что будет происходить в системе? Будут ли иметься какие-то особенности в зависимости высоты заполнения второго сосуда от параметра – количества более легкой жидкости? Жидкости не перемешиваются.

Решение 1.

Из условия задачи (стакан кубической формулы), внутренний объем равен $V = d^2$. Тогда масса налитой воды равна $m = \rho \cdot d^3$. Масса же стакана (без воды) равна $m_c = M - m = M - \rho d^3$. Искомая плотность $\rho_c = \dfrac{M - \rho d^3}{V_c}$.

Объем стенок стакана определим так: от объема куба со стороной *D* вычтем внутренний куб со стороной *d*. $V_c = D^3 - d^3$, тогда $\rho_c = \dfrac{M - \rho d^3}{D^3 - d^3}$.

Вычислим: $\rho_c = \dfrac{350 - 1 \cdot 6{,}9^3}{7{,}0^3 - 6{,}9^3} = 1{,}483$ (г/см^3).

Решение 2.

«Волга» проехала путь от пункта *A* до места встречи с «Жигулями» за время t_x, а «Жигули» этот же участок проехали за t_1 = 50 минуты. В свою очередь, «Жигули» проехали путь от пункта *B* до места встречи с «Волгой» за время t_x, а «Волга» этот же участок проехала за t_2 = 32 минуты. Запишем эти факты в виде уравнений:

$$v_2 t_x = v_1 t_1, \qquad v_1 t_x = v_2 t_2,$$

где v_1 – скорость «Жигулей», а v_2 – скорость «Волги». Поделив почленно одно уравнение на другое, получим: $v_1/v_2 = v_2 t_2 / v_1 t_1$, откуда

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = 0{,}8.$$

Тогда $v_1 = 0{,}8 v_2$ = 64 км/ч.

Решение 3.

Для начала определим площадь поверхности картофелины

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 = 113{,}04 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Если ширину шкурки принять равной 1 см, то можно нарезать

$$l_1 = \frac{\sqrt{S}}{1} \cdot \sqrt{S} = 113{,}04 \text{ (см)}.$$

Оценим, сколько картофелин содержится в 1 кг

$$n = \frac{m}{\rho V_1} = \frac{3}{4}\frac{m}{\rho \pi R^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1200 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}03)^3} \approx 8$$

Длина снятой шкурки

$$l = n l_1 = \frac{300m}{\rho R} = 8{,}33 \text{ м}.$$

Длина снятой шкурки при уменьшении размеров в *N* раз

$$L = \frac{300Nm}{\rho R}.$$

Тогда $L/l = N$.

Мелкую картошку неудобно держать в руке, отсюда скорость чистки будет уменьшаться, тратится энергия на взятие картошки (больше движений). Крупную картошку почистить удастся быстрее.

Решение 4.

Сила давления воды на дно

$$F_{\text{дно}} = p_{\text{дно}} \cdot S_{\text{дно}} = \rho \cdot g \cdot h \cdot a \cdot b, \qquad (1)$$

где h – высота воды, a и b – размеры дна, $F_{\text{дна}}$ = 60 Н, a = 0,20 м – меньшая сторона.

Сила давления воды на меньшую стенку

$$F_{\text{бок1}} = p_{\text{ср}} \cdot S_{\text{бок1}} = \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot a \cdot h, \qquad (2)$$

где $F_{\text{бок1}}$ = 10 Н.

Сила давления воды на большую стенку, которую надо найти, равна

$$F_{\text{бок2}} = p_{\text{ср}} \cdot S_{\text{бок2}} = \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \rho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} \cdot b. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем значение b и h. Например,

$$\frac{F_{\text{дно}}^2}{F_{\text{бок1}}} = \frac{(\rho \cdot g \cdot h \cdot a \cdot b)^2}{\rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot a \cdot h} = 2\rho \cdot g \cdot a \cdot b^2, \; b = \sqrt{\frac{F_{\text{дно}}^2}{2\rho \cdot g \cdot a \cdot F_{\text{бок1}}}} = \frac{F_{\text{дно}}}{\sqrt{2\rho \cdot g \cdot a \cdot F_{\text{бок1}}}},$$

$$F_{\text{дно}} = \rho \cdot g \cdot h \cdot a \cdot \frac{F_{\text{дно}}}{\sqrt{2\rho \cdot g \cdot a \cdot F_{\text{бок1}}}} = F_{\text{дно}} \cdot h\sqrt{\frac{\rho \cdot g \cdot a}{2F_{\text{бок1}}}}, \; h = \sqrt{\frac{2F_{\text{бок1}}}{\rho \cdot g \cdot a}},$$

b = 0,3 м, h = 0,1 м.

Подставим полученное значение в уравнение (3)

$$F_{\text{бок2}} = \frac{\rho \cdot g}{2} \cdot \frac{2F_{\text{бок1}}}{\rho \cdot g \cdot a} \cdot \frac{F_{\text{дно}}}{\sqrt{2\rho \cdot g \cdot a \cdot F_{\text{бок1}}}} = F_{\text{дно}}\sqrt{\frac{F_{\text{бок1}}}{2\rho \cdot g \cdot a^3}}, \; F_{\text{бок1}} = 15 \text{ Н}.$$

Решение 5.

Пусть высота столба тяжелой жидкости в первом сосуде составляет l_1, а во втором – l_2. Очевидно, $l_1 + l_2 = 2H$. Условие равенства давлений в соединяющей трубке дает $\rho_Л l + \rho_m l_1 = \rho_m l_2$, где l – «количество» подлитой легкой жидкости. Из этих двух соотношений легко находим

$$l_2 = H + \frac{\rho_Л l}{2\rho_m}.$$

Однако это соотношение будет выполняться лишь до тех пор, пока легкая жидкость не вытеснит тяжелую во второй сосуд, т.е. до $l_2 = 2H$, или

$$l = \frac{2\rho_m}{\rho_Л} H.$$

Начиная с этого момента, часть легкой жидкости будет перетекать из первого сосуда во второй и всплывать наверх, поскольку жидкости не перемешиваются. В этом случае

$$\rho_Л (l - x) = 2\rho_m H + \rho_Л x_2 ,$$

где x – количество легкой жидкости, перетекшей во второй сосуд. Тогда легко получаем

$$l_2 = 2H + x = 2H + \frac{\rho_Л l - 2\rho_m H}{2\rho_Л} = \frac{1}{2} l + H\left(2 - \frac{\rho_m}{\rho_Л}\right).$$

Нетрудно видеть, что в первом случае наклон графика зависимости уровня во втором сосуде от количества подлитой жидкости определяется коэффициентом $\frac{\rho_Л}{\rho_m}$, а во втором – $\frac{1}{2}$. Таким образом, соответствующий график имеет в точке $l = \frac{2\rho_m}{\rho_Л} H$ излом.